

Probabilità e rischio

Pasquale Erto, Massimiliano Giorgio, Iunio Iervolino

Nella gestione del rischio oltre alla sua valutazione è necessario sviluppare strategie decisionali per governarlo. Esiste uno stretto legame tra lo stato di conoscenza del valutatore e le sue possibili valutazioni che saranno tanto più corrette quanto più correttamente incorporeranno tutte le informazioni disponibili. Conoscenza, probabilità, perdite, sono le parole chiave per un approccio allo stato dell'arte alla valutazione e gestione dei rischi.

Fenomeni naturali, probabilità e perdita

Per esperimento casuale s'intende, nel gergo scientifico, ogni operazione, attività, o *fenomeno* il cui esito non può essere previsto con certezza. Esempio classico è il lancio di una moneta, il cui esito (i.e., testa o croce) è incerto per antonomasia. Lo stesso concetto di esperimento casuale (in senso lato) si applica anche nel caso ci si riferisca all'osservazione di un fenomeno naturale, il cui esito rimarrà incerto fintanto che il fenomeno non si sarà manifestato. Si pensi ad esempio alle condizioni meteo che interesseranno il luogo in cui ci troveremo alle ore diciassette in punto del prossimo lunedì. Nella quasi totalità dei casi in cui è incerto l'esito, incerta è anche la perdita (i.e., le conseguenze, potenzialmente avverse) che l'esperimento può produrre, sia perché la perdita di norma dipende dall'esito, sia perché sovente non è possibile associare un valore certo della perdita a ognuno dei possibili esiti. La mancanza di conoscenza *completa* sui meccanismi che regolano l'esperimento e sulle esatte condizioni in cui si svolge, nonché la mancanza di conoscenza del valore *esatto* delle perdite che gli esiti dello stesso possono produrre, non permettono di conoscere a priori nessun possibile esito e nessun possibile livello di perdita. Infatti, sia l'uno sia l'altro (eventualmente entrambi) posso-

no cambiare se si ripete l'esperimento in condizioni *nominalmente* identiche (i.e., non distinguibili agli occhi dello sperimentatore).

È evidente come sia importante riuscire a trattare questo tipo d'incertezza. Il calcolo delle probabilità fornisce gli strumenti che permettono di utilizzare tutte le conoscenze (anche se incomplete) di cui si dispone per esprimere in maniera coerente la probabilità che lo stesso dia luogo a un dato esito (o più in generale che accada un dato evento¹) piuttosto che a un altro. Ancor meglio, dal punto di vista della valutazione del rischio, gli strumenti matematici del calcolo delle probabilità possono essere utilizzati per esprimere direttamente la probabilità che l'esperimento/fenomeno considerato produca un dato valore della perdita.

Valutazione del rischio: la perdita attesa

In condizioni d'*incertezza*, identificati tutti i possibili (diciamo n) valori, L_i , che può assumere la perdita (prodotta dall'esperimento) e definita la probabilità $P[L_i]$ di osservare ciascuno di essi, è possibile effettuare una valutazione

¹ Un evento è per definizione un'asserzione logica che in tutta coscienza non possiamo definire né *vera* né *falsa*, bensì solo *possibile*. In generale solo i fatti successivi possono affermare o smentire un evento formulato in precedenza. Per non confondere fatti con eventi notiamo che un evento ammette la sua negazione mentre un fatto no.

quantitativa del rischio tramite la (1), che restituisce la cosiddetta *perdita attesa*, $E[L]$ (dall'inglese *Expected Loss*), cioè la media pesata di tutti i possibili valori della perdita che un esperimento d'interesse può produrre. Come evidenziato nella (1), il peso da attribuire a ciascun valore della perdita è la *probabilità* della stessa.

$$\text{Rischio} = E[L] = \sum_{i=1}^n L_i \cdot P[L_i] \quad (1)$$

Valutare il rischio in termini di perdita attesa è estremamente utile per due motivi: il primo è che consente di armonizzare e trattare in modo coerente il complesso delle informazioni possedute da chi esegue la valutazione; il secondo è che consente di confrontare rischi di natura del tutto diversa, esprimendoli in termini dell'unità di misura (ad esempio euro) utilizzata per misurare il valore della perdita. Quest'ultima caratteristica è essenziale per stabilire strategie di gestione dei rischi. Ad esempio: supponiamo ci si trovi nel caso in cui si sia appena verificato uno sciame sismico² di moderata intensità in una zona vicina a un sito d'interesse, e supponiamo ancora che chi è preposto alla valutazione del rischio ritenga che tale sciame possa determinare l'occorrenza di un terremoto forte di qui a sei mesi³ con probabilità 0,01. Assegnata tale probabilità, e assunto che la perdita prodotta dall'eventuale terremoto corrisponda a un miliardo di euro, mentre la perdita stessa sia nulla nel caso esso non si manifesti, utilizzando la relazione (1) si ottiene per il rischio il valore nell'equazione (2).

$$\text{Rischio} = E[L] = (0 \text{ €}) \cdot 0,99 + (1 \cdot 10^9 \text{ €}) \cdot 0,01 = 1 \cdot 10^7 \text{ €} \quad (2)$$

Si noti che il rischio così ottenuto, pur essendo espresso in euro, non coincide con il valore che la perdita assumerà. Infatti, il rischio definito dalla (1) non deve interpretarsi come il valore effettivo della perdita che ci si deve aspettare di osservare; piuttosto è da intendersi come il valore cui tenderà la media aritmetica delle perdite realmente osservate in un numero grandissimo di situazioni nominalmente identiche.

Perdita attesa e decisioni ottime

Per completare il processo di gestione del rischio, oltre alla valutazione dello stesso è necessario sviluppare delle strategie decisionali per governarlo, ovvero strategie che permettono di individuare qual è l'azione (A^*), tra quelle disponibili ($A_i, i = 1, 2, \dots, l$), che è *conveniente* intraprendere per minimizzare la perdita che potrebbe essere prodotta dall'esperimento casuale di interesse. A tal fine, torna utile la definizione di rischio (1). Infatti, appare naturale definire quale *decisione*, D , *ottima*, quella che tra tutte le possibili azioni, ci porta a scegliere l'azione A^* cui corrisponde la perdita attesa, $E[L | A^*]$, più piccola: equazione (3).

$$D(A^*) \text{ è ottima} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} E[L | A^*] \leq E[L | A_i] \quad \forall i = 0, 1, \dots, l \quad (3)$$

2 Una serie di piccoli terremoti concentrati nel tempo e nello spazio, in modo possibilmente atipico rispetto alla sismicità normale.

3 Tempo oltre il quale, si assume, non ci può più essere relazione causale tra sciame e un terremoto forte.

Si noti che tra le azioni disponibili si deve sempre ritenere compresa anche l'azione, A_0 , che prevede di non intraprendere alcuna iniziativa. Per fissare le idee, si supponga, in riferimento all'esempio precedente, che coloro i quali siano preposti alla gestione del rischio debbano decidere quale sia l'azione migliore tra le seguenti azioni alternative possibili: (A_0) non intraprendere alcuna azione mitigatrice; (A_1) non evacuare il sito, ma predisporre un piano di protezione civile rafforzato per il periodo in cui si teme che il terremoto possa seguire lo sciame, al fine di fronteggiare meglio la possibile emergenza; (A_2) evacuare il sito per sei mesi. Si assuma che delocalizzare l'intero sito per sei mesi (A_2) costi cinquecento milioni di euro e che tale azione azzeri la perdita in caso di terremoto. Si assuma invece che l'azione A_1 costi dodici milioni di euro, ma che consenta solo di dimezzare la perdita in caso di terremoto. Le perdite attese sono calcolate nella (4), in cui il costo dell'azione intrapresa è ovviamente una perdita certa.

Nel caso dell'esempio, se non fosse intrapresa alcuna azione mitigatrice la perdita attesa, $E[L | A_0]$, ammonterebbe a dieci milioni di euro (2). La perdita attesa nel caso si evacui, $E[L | A_2]$, è pari a quasi mezzo miliardo di euro, mentre il piano rafforzato la riduce a circa diciassette milioni, $E[L | A_1]$. È evidente che in questo caso (del tutto accademico e senza riferimenti reali) la decisione ottima sia quella di non intraprendere alcuna azione mitigatrice.

$$\begin{cases} E[L | A_0] = (0 \text{ €}) \cdot 0,99 + (1 \cdot 10^9 \text{ €}) \cdot 0,01 \text{ €} = 1 \cdot 10^7 \text{ €} \\ E[L | A_1] = 12 \cdot 10^6 \text{ €} + (0 \text{ €}) \cdot 0,99 + (5 \cdot 10^8 \text{ €}) \cdot 0,01 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ €} \\ E[L | A_2] = 5 \cdot 10^8 \text{ €} + (0 \text{ €}) \cdot 0,99 + (0 \text{ €}) \cdot 0,01 = 50 \cdot 10^7 \text{ €} \end{cases} \quad (4)$$

Naturalmente, per utilizzare l'approccio discusso è essenziale definire i *pesi* che sono utilizzati nel calcolare la perdita attesa, cioè le probabilità $P[L_i]$. Nel paragrafo successivo sono discussi gli approcci e gli strumenti matematici che i valutatori possono utilizzare per produrre misure coerenti di dette probabilità, utilizzando tutti i dati e le conoscenze in proprio possesso che, insieme al dimensionamento delle perdite potenziali, costituisce la responsabilità che ricade su chi si cimenta in tali analisi probabilistiche.

Definizione di probabilità e criteri di calcolo tradizionali

Secondo l'approccio ormai consolidato e universalmente condiviso, il calcolo delle probabilità è una scienza matematica che deve essere sviluppata a partire dai postulati (i.e., regole di coerenza) che la governano (Andrei Nikolaevich Kolmogorov, 1903-1987). I postulati sono dettati senza discuterne il significato pratico; quindi da essi si ricavano tutte le ulteriori regole di calcolo (i.e., teoremi). Secondo tale moderno approccio, il concetto stesso di probabilità è un concetto primitivo e tutti i criteri che il valutatore deciderà di utilizzare per misurare la probabilità saranno da considerare matematicamente legittimi a patto che le valutazioni prodotte rispettino le regole di coerenza dettate.

Vale la pena rilevare che una valutazione matematicamente legittima potrebbe comunque non avere validità pratica qualora il valutatore non si facesse carico, nell'esprimerla, della responsabilità di utilizzare tutte le informazioni di cui effet-

tivamente dispone. In effetti, dal punto di vista operativo, giova riconoscere l'esistenza di una conseguente responsabilità⁴ che grava su chi valuta una probabilità, in maniera del tutto simile a quanto capita in qualsiasi altro ambito professionale o scientifico. Una costruzione civile [una probabilità] calcolata seguendo correttamente i dettami della tecnica delle costruzioni [del calcolo delle probabilità] può essere non correttamente progettata, per gli scopi cui è destinata, se nel calcolarla si è ommesso di considerare l'esistenza di una causa sollecitante possibile come quella sismica [un elemento di conoscenza essenziale in relazione all'esperimento casuale]. La responsabilità, connessa con ogni valutazione di probabilità, deve indurre a rifiutare ogni arbitrio nell'analisi e nell'uso delle conoscenze disponibili al momento del calcolo.

Solo motivi di opportunità, valutazioni professionali, conoscenze soggettive, ecc., fanno decidere quale debba essere il criterio da adottare per formulare una probabilità. Nello stesso tempo, come già accennato sopra, le regole matematiche che è necessario seguire nulla dicono circa il criterio di formulazione da scegliere, ma semplicemente guidano al fine di sviluppare coerentemente il calcolo deduttivo necessario per arrivare a valutare i rischi. Ciò crea le premesse sia per realizzare un'effettiva pratica utilità delle valutazioni probabilistiche prodotte sia per ottenere il consenso di altre persone interessate agli stessi quesiti cui si riferiscono dette valutazioni.

Nemmeno le situazioni in cui tutti operano le stesse scelte di calcolo (divenute pertanto consuete) ci sottraggono all'ob-

bligo di *rendere comunque esplicite le ipotesi adottate*. Infatti, ciò è necessario affinché non sia preclusa, inconsapevolmente, la strada per ulteriori affinamenti di calcolo, qualora essi fossero utili, o addirittura indispensabili, a seguito di una non più confermabile adeguatezza delle nostre ipotesi originarie a fronte di *eventuali ulteriori informazioni venute in nostro possesso*.

È tuttavia utile individuare alcune situazioni tipiche che danno origine a calcoli consueti e che in passato hanno suggerito altrettante definizioni di probabilità.

Definizione classica

Tale definizione (formalizzata da Pierre Simon Laplace, 1749-1827) fa riferimento al caso di un esperimento che può avere N possibili esiti diversi, incompatibili tra loro (l'accadimento di uno implica che non possano essersi verificati gli altri) e tutti egualmente possibili. In tale contesto, assunto che N_A di tali esiti fanno verificare l'evento A , allora la probabilità di A , $P[A]$, viene definita mediante l'equazione (5).

$$P[A] = N_A / N \quad (5)$$

Si noti che, pur essendo fondata su di un criterio di calcolo valido nella specifica situazione suddetta, è evidente che la (5) non può essere accettata come definizione perché come tale sarebbe *circolare*. Infatti, nella dizione *egualmente possibili* essa utilizza implicitamente il concetto di probabilità prima ancora di definirlo. Inoltre, il criterio classico non è applicabile se gli esiti dell'esperimento sono virtualmente infiniti e/o non equiprobabili (ad esempio, i millimetri d'acqua che cadranno in un certo luogo al prossimo temporale).

Definizione frequentista

Una seconda definizione di probabilità, che supera alcuni dei limiti che caratterizzano quella classica, è quella frequentista

⁴ Non ci dobbiamo illudere: il calcolo deduttivo di una probabilità secondo regole matematiche costituisce un risultato scientifico inconfutabile; tuttavia, accettare l'adeguatezza del risultato a una ben determinata realtà fisica costituisce comunque una nostra scelta, di cui non possiamo disconoscere la paternità e la conseguente responsabilità.

(Richard Von Mises, 1883-1953). Questa, assunto che un esperimento possa essere replicato un numero n illimitato di volte, in condizioni, di replica in replica, nominalmente (i.e., macroscopicamente) identiche, definisce la probabilità attraverso il limite di cui alla (6),

$$P[B] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_B}{n} \quad (6)$$

dove n_B è il numero di repliche in cui si è verificato l'evento B . Anche la (6), pur suggerendo un criterio di calcolo valido nella situazione considerata, è ben lungi dal potere essere considerata una vera e propria definizione: infatti nessuno è in grado di assicurarci che il limite considerato esista e ancora, qualora esista, nessuno può assicurarci che esso coincida con quello che in effetti s'intende misurare, ovvero la probabilità di B , la cui esistenza rappresenta essa stessa un atto di fede. Inoltre, anche questa definizione non ha valenza generale, perché presuppone la ripetibilità dell'esperimento che non è sempre possibile (si pensi a eventi naturali molto rari come eruzioni o terremoti d'intensità possibile ma mai ancora osservata) e, in certi casi, non è nemmeno concepibile (come, ad esempio, quando si tratta del successo di una missione spaziale "unica" oppure delle complicanze conseguenti a un intervento chirurgico innovativo). Infine, anche assunto che l'esperimento si possa replicare, andrebbe comunque chiarito cosa s'intende quando si dice che le condizioni di prova sono nominalmente identiche, concetto da giudicare almeno vago, considerato che le differenti repliche producono di norma esiti differenti proprio perché lo sperimentatore non è in grado di controllare il valore o l'effetto di tutti i fattori che influenzano il risultato.

Definizione soggettivista

Essendo ormai per molti chiaro che le due precedenti definizioni di probabilità sono permeate da una forte componen-

te di soggettività (*l'egualmente possibili* nelle definizioni classica, e l'esistenza del limite e il suo coincidere con la probabilità nel caso frequentista), una terza corrente di pensiero ha sviluppato una definizione di probabilità incentrata totalmente sul concetto di probabilità come *grado di fiducia*, senza presupporre particolari precisazioni ulteriori rispetto a questa definizione.

Per comprendere la definizione soggettivista, può essere utile pensare a un'ipotesica scommessa in cui si è pronti a puntare la somma a che un esperimento dimostrerà che l'evento E è vero (i.e., si verificherà) contro la somma b che dimostrerà che E è falso (i.e., non si verificherà). In tale situazione è coerente formulare, quale *valutazione soggettiva* della probabilità di E , il seguente rapporto (7).

$$P[E] = a / (a + b) \quad (7)$$

Sulla base di questo schema delle scommesse (e fissando $a + b = 1$, cioè la probabilità dell'evento formato da tutti i possibili esiti alternativi dell'esperimento), Bruno de Finetti (1906-1985) introdusse sin dagli anni trenta la più generale e operativa definizione di Probabilità. Il ricorso a uno schema logico ideale evita di definire la probabilità mediante uno dei suoi metodi di valutazione. Inoltre, induce le parti interessate a compiere ogni sforzo affinché siano minimizzati i rischi connessi con la valutazione proposta (cioè a utilizzare tutte le conoscenze sul fenomeno), ivi inclusi i rischi di chi veste i panni del banco il quale deve essere d'accordo a scommettere $1 - P[E]$ per ricevere l'unità del capitale nel caso E non si verifichi⁵. In effetti, come notato dal punto di vista concettuale è molto utile approfondire

5 Gli aspetti operativi e di coerenza di questa definizione sono evidenti e richiamano i contenuti di quella saggia regola contadina la quale, essendo necessario dividere un fondo tra due persone, prescriveva che una procedesse alla divisione e l'altra alla scelta.

il significato dell'ultimo esempio. Supponiamo che il valore (o prezzo) che consideriamo giusto per un certo bene sia $a + b$ euro. Se ci offrissero di trasferirci la proprietà del bene a condizione che si verifichi l'evento E , è ovvio che non saremmo più disposti a pagare $a + b$ euro, ma un prezzo inferiore, diciamo a , tanto più vicino a $a + b$ quanto più fossimo fiduciosi nel verificarsi di E , e tanto più vicino a zero quanto più fossimo convinti del contrario. Il rapporto definito tramite la (7) può essere assunto come misura della probabilità $P[E]$.

Probabilità, stato di conoscenza e teorema di Bayes

Come evidenziato, ogni valutazione di probabilità è da considerarsi condizionata da tutte le conoscenze che il valutatore possiede nel momento in cui la formula. Ne deriva che se cambiano le sue conoscenze devono essere ripetute, di conseguenza, anche le sue valutazioni. Ovviamente il problema per il valutatore è quello di rivedere i propri calcoli in maniera coerente, e in particolare in maniera che i risultati non confliggano con le valutazioni che aveva prodotto sulla base delle informazioni pregresse. Allo scopo torna utile l'uso del teorema di Bayes, che codifica in termini matematici la strategia da utilizzare per operare correttamente tale aggiornamento/revisione.

Qui di seguito, introdurremo, attraverso un esempio, l'espressione di tale teorema, al fine di mostrarne le potenzialità e dare evidenza delle sue implicazioni. In particolare, riprendendo l'esempio del primo paragrafo, vedremo come il teorema di Bayes permetta di valutare la probabilità (in detto esempio posta pari a 0,01) che un terremoto (T) forte segua entro sei mesi lo sciame sismico (S) effettivamente osservato. A tal fine si supponga che, su base storica, la probabilità di osservare, nell'arco di sei mesi, un terremoto nella regione d'interesse sia l'uno per mille (questa probabilità è valutata a prescindere dal fatto che sia stato o meno stato osservato uno sciame prima del terremoto). Ancora, si assuma che analisi storiche ci dicano anche che il 40% delle volte in cui si è verificato un terremoto forte nella regione esso è stato preceduto da uno sciame. Inoltre, che nel 4% dei casi in cui non è avvenuto alcun terremoto è stato comunque registrato uno sciame sismico. Sulla base di tali informazioni sono state formulate le probabilità in (8), dove la barra verticale (quando presente) indica che nel valutarle si è assunto che è avvenuto l'evento a destra della stessa (*evento condizionante*).

$$P[T] = 0,001; P[S | T] = 0,4; P[S | \bar{T}] = 0,04 \quad (8)$$

Assegnate tali probabilità, assunto che si sia verificato uno sciame sismico, possiamo calcolare la probabilità, $P[T | S]$, che lo sciame osservato prelude a un terremoto forte, attraverso il teorema di Bayes, come da equazione (9).

$$\begin{aligned} P[T|S] &= \frac{P[T \cap S]}{P[S]} = \frac{P[\text{Si verifichi sia lo sciame sia il terremoto forte}]}{P[\text{Si osservi lo sciame}]} = \\ &= \frac{P[S|T] \cdot P[T]}{P[S|T] \cdot P[T] + P[S|\bar{T}] \cdot (1 - P[T])} = \frac{0,4 \cdot 0,001}{0,4 \cdot 0,001 + 0,04 \cdot 0,999} = 0,01 \end{aligned} \quad (9)$$

Come si vede, sulla base della sola aggiunta d'informazione che ci sia stato uno sciame, la probabilità che ci sia un terremoto in atto, $P[T | S]$, è aumentata di

dieci volte⁶ rispetto a quella attribuita sulla base dei soli dati storici (i.e., $P[T]$). In realtà, si può immaginare che se fossero disponibili informazioni relative ad altri precursori affidabili la valutazione della probabilità di un terremoto potrebbe essere ulteriormente affinata, utilizzando ancora una volta il teorema di Bayes. Sulla scorta di questa riflessione è possibile anche dedurre che il calcolo delle probabilità non è per nulla in contraddizione col determinismo. Infatti, esso è compatibile con un punto di vista secondo cui, con l'aumentare della conoscenza sul fenomeno (i.e., sui suoi meccanismi e sui fattori che lo determinano), il risultato dell'esperimento tende a divenire certo.

Generalizzando, si potrebbe dire che è logico ritenere che le migliori valutazioni possono essere prodotte solo da chi conosce meglio il fenomeno (e il calcolo delle probabilità). Questo è il motivo, in effetti, per cui le valutazioni di pericolosità (i.e., probabilità di occorrenza di eventi pericolosi) e dei rischi associati si chiedono di norma agli *esperti*, intendendo con questo termine, proprio quelli che sono in grado di ridurre al minimo l'incertezza sul fenomeno in esame, avendolo studiato *più di tutti*.

Conclusioni

Si è messo in evidenza il legame indissolubile che esiste tra lo stato di conoscenza del valutatore e le valutazioni che questi produce. In particolare, quando si afferma che la valutazione di una probabilità è sostanzialmente soggettiva non s'intende dire che essa può essere for-

6 Tuttavia, tale probabilità potrebbe essere ritenuta ancora bassa. In effetti, l'esempio nel primo paragrafo mostra che, nonostante tale aumento, è sconveniente intraprendere un'azione mitigatrice, se i valori delle probabilità e delle perdite fossero effettivamente quelli assegnati.

mulata in maniera arbitraria, ma piuttosto per sottolineare la responsabilità che cade sul valutatore di produrre una valutazione che incorpori in maniera coerente tutte le informazioni di cui effettivamente dispone. Ciò significa che le stime di probabilità sono da considerarsi corrette se e solo se incorporano correttamente tutte le informazioni disponibili. Quest'aspetto richiede una riflessione attenta; infatti, esso prevede implicitamente che le stime dei rischi cambino in ragione del livello d'informazione del valutatore, e ancora che la validità delle stesse decada in caso di acquisizione di conoscenze ulteriori e/o all'occorrenza dell'evento d'interesse.

Si è visto pure come sia opportuno esprimere i rischi in termini delle perdite che l'esperimento/fenomeno può produrre e delle probabilità associate. Solo la valutazione delle conseguenze, infatti, può rendere comparabili decisioni per la gestione dei rischi e confrontabili rischi diversi. Da qui scaturisce la possibilità di indirizzare, nel modo ottimo (secondo un criterio di utilità) le risorse per la mitigazione dei rischi. A tale proposito sono stati discussi brevemente i concetti di *perdita attesa* e *decisione ottima*. In conclusione, conoscenza, probabilità, perdite, sono le parole chiave per un approccio allo stato dell'arte alla valutazione e gestione dei rischi.

Bibliografia

- Benjamin J.R., Cornell C.A. (1970) *Probability, statistics and decision for civil engineers*, McGraw-Hill.
- de Finetti B. (1990) *Theory of probability: a critical introductory treatment*, John Wiley & Sons.
- Erto P. (2008) *Probabilità e statistica per le scienze e l'ingegneria*, terza edizione, McGraw-Hill.
- Grandori G., Guagenti E. (2012) *Rischio sismico. Decidere in condizioni di incertezza*, McGraw-Hill.
- Mood A.F., Graybill M.A., Boes D.C. (1974) *Introduction to the theory of statistics*, terza edizione, McGraw-Hill.