Probabilmente

Guido Trombetti

La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1 che si applica ad un insieme di eventi. Un ampio inventario di eventi dai dadi alla roulette, al lotto, persino al calcio, mostra se e quanto può incidere il caso.

Forse niente è più scivoloso dei concetti del calcolo delle probabilità. Vanno maneggiati con estrema cura. In fondo sono concetti che ognuno usa tutti i giorni. Anche per prendere le decisioni più banali. Intanto che cosa è la probabilità? È un numero compreso tra 0 ed 1. A che cosa si applica la probabilità? Ad un insieme di eventi. Per intenderci pensiamo ad un comune dado. Con le facce numerate da 1 a 6. Perfettamente bilanciato. Cioè non truccato. Per evento intendiamo ogni situazione che sia riferita ad un lancio del dado. "Esce 3" è un evento. "Esce un numero pari" è un evento. "Esce un numero più grande di 2" è ancora un evento. Chiunque risponderebbe che la probabilità dell'evento "esce 3" è 1/6. Mentre quella dell'evento "esce un numero pari" è 3/6. Così quella dell'evento "esce un numero più grande di 2" è 4/6. Se un evento ha probabilità 0 si parla di "evento impossibile". Se ha probabilità 1 di "evento certo". Per esempio ognuno degli eventi "esce un numero più grande di 8" o "esce il numero 5/7" è un evento impossibile. Ha probabilità 0. Così come gli eventi "non esce un numero più grande di 8" o "esce un numero positivo" sono eventi certi. Ognuno di essi ha probabilità 1. E finché si gioca con i dadi tutto è facile. Quasi ovvio.

Eppure le nozioni di evento impossibile e di evento certo possono diventare insidiose. Sul piano semantico addirittura paradossali. Un evento certo non è detto che si verifichi certamente! Così come un evento impossibile potrebbe verificarsi! Per intenderci facciamo un esempio. Pensiamo ad un bidone con base circolare. E pensiamo che l'area del cerchio di base sia 1. Lanciamo a caso nel bidone una pallina tanto piccola da poter essere assimilata ad un punto. Qual è la probabilità che la pallina si fermi in una determinata regione A del cerchio? È più che ragionevole assegnare ad un evento di questo tipo la probabilità "area di A". Più grande è A più grande sarà la probabilità che la pallina si fermi in A. Adesso fissiamo un singolo punto P nel cerchio di base del cilindro. Qual è la probabilità dell'evento "la pallina si ferma in P"? Poiché l'area di un punto è 0 la probabilità dell'evento è 0. Cioè si tratta di un evento impossibile. Eppure potrebbe verificarsi che la pallina si fermi proprio in P. Anche perché la pallina in qualche punto è pur vero che si fermerà. Così la probabilità dell'evento "la pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P" è 1. Perché l'area del cerchio privato di un punto è uguale all'area del cerchio e cioè vale 1. Quindi l'evento "la pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P" è un evento certo… che ovviamente non è certo che si verifichi.

È chiaro che dal punto di vista del giocatore d'azzardo l'evento "la pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P" merita qualunque scommessa. Salvo poi ad imprecare al destino cinico e baro.

Lasciamo i dadi e passiamo al lancio di una moneta. Per parlare di una delle leggi più citate e forse meno comprese del calcolo delle probabilità.

La "legge dei grandi numeri" (Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713): in una serie di prove ripetute nelle medesime condizioni, al crescere del numero delle prove, la percentuale dei casi in cui si verifica un evento (ad esempio l'evento "esce testa") "tende" a coincidere con la probabilità dell'evento stesso.

Cioè lanciando un gran numero di volte la moneta la percentuale dei casi in cui esce testa "tende" ad essere il 50%.

Riflettiamo un attimo. Vogliamo lanciare una moneta 100 volte. Se nei primi 60 lanci esce croce la legge dei grandi numeri non dice che nei successivi 40 lanci è più probabile che esca testa. La moneta "non ha memoria dei casi precedenti". Al sessantunesimo lancio la probabilità che esca testa continua ad essere il 50%. Così come al sessantaduesimo… La legge dei grandi numeri indica un comportamento asintotico che non influenza l'esito della singola prova. C'è la possibilità che nei successivi 40 lanci si bilanci un po' la bizzarra sequenza "60 volte croce"? Ovviamente sì. Ma non vi è alcuna regolarità certa cui potersi riferire. Colui il quale ne immaginasse una per scommettere sconsideratamente andrebbe in rovina. Come tanti che, interpretando la legge in modo allegro, si sono ostinati a giocare al raddoppio sui ritardi.

Per finire un caso che può apparire paradossale.

Se per mille lanci consecutivi esce testa posso mai credere che la probabilità che esca testa ancora al milleunesimo lancio sia il 50%? In un caso del genere probabilmente il grande Bruno De Finetti avrebbe invocato il concetto di "probabilità soggettiva". Concludendo: è molto ragionevole pensare che la moneta sia truccata. E che quindi al lancio successivo esca ancora testa.

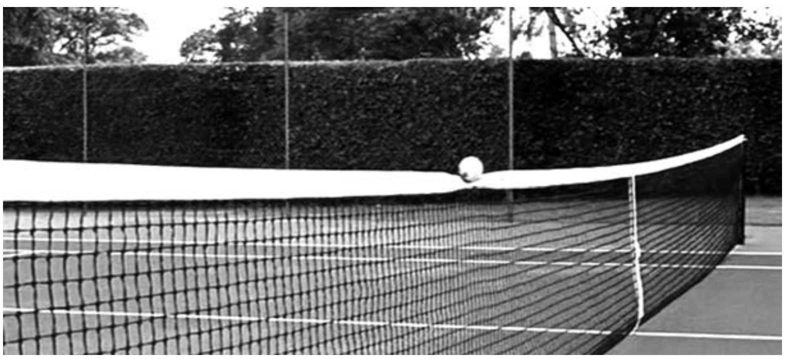
Quando si parla di probabilità non si può non pensare al gioco d'azzardo. E quindi alla roulette. La roulette è, nell'immaginario collettivo, l'emblema del rischio. Capace di stregare anche persone di straordinaria qualità. Eppure è tra i giochi d'azzardo più "equi". Non c'è confronto, ad esempio, tra "l'onestà" della roulette e quella del "lotto". Ma cosa significa che un gioco è "equo"? Scommetto S. Incasso I (cioè guadagno I - S) se si verifica un certo evento (esce il rosso, esce un numero tra 1 e 12, esce il 27, ecc.). Meno l'evento è probabile più rischio, più devo incassare. Il gioco è "equo" se vi è una proporzione "equa" tra la scommessa e l'incasso. Cioè se S diviso per I è uguale alla probabilità P che l'evento si verifichi. In sintesi il gioco è equo se $S/I = P$. Pensiamo di giocare una fiche sul rosso. Nel caso esca rosso incasseremo due fiche. Quindi $S = 1$ e $I = 2$. D'altro canto nella roulette vi sono 37 numeri di cui 18 rossi e 18 neri. Vi è poi lo zero. Se esce vince il banco. Quindi la probabilità di vittoria è data (casi favorevoli diviso casi possibili) da 18/37 e cioè, arrotondando, 0,4865. Mentre $S/I = 1/2 = 0{,}5$. Quindi il gioco non è equo perché 0,4865 è più piccolo di 0,5. Quale sarebbe l'incasso "giusto" a fronte della scommessa di una fiche? Basta risolvere l'equazioncina di primo grado (solito quaderno a quadretti della scuola media) $1/I = 0{,}4865$ e si trova $I = 2{,}0542$. Poiché si incassano solo 2 (e non 2,0542) fiche si ha che l'incasso è il 97,3% del "giusto". Questa percentuale è detta **rendimento**. Rimane fissa, nel caso della roulette, per ogni puntata ordinaria. Un gioco equo ha un rendimento del 100%. Lo scarto del 2,7% è detto **tassa dello zero**. Lo zero, infatti, crea "l'iniquità" a favore del banco. Chi organizza (e cioè il casino) deve pur guadagnare! Analogamente se punto 1 fiche su un numero ed il numero esce ne incasso 36. Non ci vuole molto per capire che l'incasso equo dovrebbe essere di 37. E 36 è circa il 97,3% di 37. Chi ne ha voglia può facilmente calcolare che l'estratto semplice nel lotto ha un **rendimento** al di sotto del 65% (assumiamo si incassi 11 volte la posta). Si capisce allora che la roulette è "quasi equa". In una serata il vantaggio del banco è minimo. Addirittura trascurabile. Ma sui tempi lunghi c'è poco da sperare. Un esempio estremo. Si parte dalla cifra di cui dispone il giocatore, dalla vincita che spera di realizzare e dalla tattica di gioco che vuole usare. Il giocatore possiede 200 fiche. Giocandone sul rosso una a puntata ne vuole incassare due. Cioè incrementare di una fiche il suo capitale. Appena è in vantaggio di una fiche si ritira. Immaginate un signore che se esce rosso fa un passo avanti altrimenti fa un passo indietro (**passeggiata casuale**). Ed appena si trova un passo avanti al punto di partenza ha vinto. Se il gioco fosse equo mediamente il signore avanzerebbe di zero passi. Uno avanti ed uno indietro. Poiché c'è da pagare la tassa sullo zero che è del 2,7%, in media arretrerà di "0,027 passi". In realtà ci saranno sequenze consecutive di rossi e di neri. Che so, 3 neri, 2 rossi, 1 nero, 4 rossi… Ed è estremamente probabile che il signore si trovi, in un determinato istante, un passo avanti (ha vinto la sua fiche) ben prima di trovarsi 200 passi indietro (ha perso tutto il capitale). Il tizio, però, non si accontenta di vincere 1 fiche. E pensa di ripetere il giochetto per 200 sere sperando di possederne alla fine 400. Se la probabilità che il trucco funzioni una sera è p (mettiamo anche il 99%) qual è la probabilità che funzioni per 200 sere? È molto interessante calcolare la probabilità che il giocatore perda l'intero capitale giocando indefinitamente (che nel concreto significa per moltissime sere). Che si verifichi, cioè, l'evento noto quale **rovina del giocatore**. A tal proposito vale una formula che dà la **probabilità di rovina** (e cioè di perdere tutto prima di aver raggiunto l'obiettivo). La scrivo perché è carina. Nessuno si senta obbligato a leggerla. P è la probabilità di vincere un singolo colpo. Q (cioè 1 - P) quella di perdere. Indichiamo Q/P con A. La probabilità di rovina (per un gioco non equo) è data da $(A^h - A^x)/(1 - A^x)$. Nel caso di capitale iniziale 10 con obiettivo finale 20 il giocatore va in bancarotta con probabilità circa 0,608. Se l'obiettivo è 40 la probabilità di rovina cresce circa allo 0,907. Se vuol vincere 200 partendo da 200… è matto! (Anche con un gioco equo ci si può rovinare e la probabilità è $1 - h/x$). Sia chiaro. Non si può ridurre il fenomeno del gioco d'azzardo a formule. Troppi gli elementi emotivi e psicologici in campo. Si pensi soltanto alle pagine o, forse ancor più alla vita, di Dostoevskij. Mi torna anche alla mente un'intervista a Vittorio De Sica. Il grande regista parlava di sé. Del suo cinema. Raccontava di aver girato qualche film "brutto" perché oppresso dai debiti di gioco. Perché? Questa, come la ricordo, la sua spiegazione: «Le motivazioni che spingono al gioco le può comprendere solo chi le avverte. Cioè un giocatore. Tutto dipende dal magico piacere di sentirsi sempre vicino alla fortuna senza riuscire ad afferrarla mai». Tutto ciò ben sanno i padroni dei casino. Anche senza aver studiato la probabilità né letto Dostoevskij. In conclusione comunque: è possibile arricchirsi con la roulette? Sì, certamente… acquistando un casino.

Una curiosità. Probabilità e statistica si affacciano anche in ambiti in cui sembrava impossibile potessero intervenire. Come ad esempio nel calcio. Se nel basket il gioco delle squadre e dei singoli giocatori è abitualmente quantificato da una serie di dati, nel calcio di solito non si va molto al di là del numero di goal segnati. Si potrebbe pensare, del resto, che in uno sport dove un singolo tiro in porta azzeccato può rovesciare una

partita in cui la squadra avversaria aveva dominato per un'ora e mezzo senza mai segnare, le statistiche significhino poco. E invece qualche tempo fa G.K. Skinner e G.H. Freeman, ricercatori dell'Università del Maryland, hanno pubblicato su *Journal of applied statistics* un articolo dal titolo *Soccer matches as experiments: how often does the 'best' team win?*. Gli autori effettuano un'accurata analisi statistica. E concludono che in un torneo la probabilità che non vinca la squadra più forte è del 78%. Quindi: il calcio è quasi una tombola! Anatema! Anatema! Gridano gli appassionati. Che senso ha più parlare di tattiche o di tocco di palla, di diagonali o di capacità di saltare l'uomo se poi molto spesso chi vince è più scarso? Ovviamente non entro nei dettagli dell'"approccio bayesiano" utilizzato nell'articolo. Dico soltanto che uno dei nodi sta nel fatto che i risultati non sono regolati dalla "proprietà transitiva". Cioè se la squadra A batte la squadra B e la squadra B batte la C non è detto che la C batta la A. Secondo i due studiosi per rimediare occorre cambiare le regole. Ad esempio far proseguire un match fino a che una delle due squadre non abbia un vantaggio di due o tre reti.
A questo punto il matematico lascia il campo all'appassionato. E ripete quando già scritto. Il calcio. Le tattiche. Il 4-3-3. Il 3-4-2-1. Aperture sulle fasce. Ripartenze. Cursori. Rifinitori. Così ci piace *sognare il mondo del calcio*. Nella realtà il suo fascino risiede nei larghi margini di imprevedibilità del risultato. Il palo. La deviazione occasionale. La svista arbitrale. Il tocco sbagliato ad un metro dalla linea di porta. Il ciuffo d'erba che cambia la traiettoria della palla. E quindi il risultato della partita. Il caso, i «tenui ed eterni interstizi di assurdità» (Borges). Questo è il calcio. Questo è il suo fascino.
Una partita di tennis equilibrata finisce 6-4,4-6,6-4. Si giocano più o meno 200 colpi. Mettiamo che in venti occasioni (e sono tante) decida un falso rimbalzo o un soffio di vento. Certamente non andranno tutte a favore dello stesso giocatore. E comunque restano 180 punti a disposizione. Quanto può incidere il caso? Molto poco. Nel calcio non è così.
Per finire una curiosità. Già nel canto sesto del Purgatorio fa capolino la probabilità:

> Quando si parte il gioco de la zara, colui
> che perde si riman dolente, repetendo
> le volte, e tristo impara.

Il gioco della zara era sostanzialmente il gioco dei dadi. Se ne lanciavano tre. Si ottenevano tre numeri. Bisognava indovinare il risultato della loro somma.
Dante descrive il giocatore che perde intento a riflettere sulle sequenze di numeri uscite. Sembra echeggiare la definizione frequentista di probabilità. Quella secondo la quale al crescere delle prove la frequenza relativa di un evento si avvicina alla sua probabilità (primi decenni del Novecento). All'epoca di Dante non erano noti nemmeno i rudimenti della probabilità. La cui nascita come disciplina scientifica va collocata alla metà del 1600. Quando Pascal e Fermat si scambiavano lettere intorno alla soluzione di problemi posti dal Cavaliere di Méré. Giocatore d'azzardo, «un fannullone dal vivace ingegno».



Qual è la probabilità che la pallina cada nel campo dell'avversario? (fotogramma finale del film *Match point* di Woody Allen).